(1)

Θεωρία Αριθμών

(11/10/2016)

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$$

$$\prod_{i=n}^{n} = a_k a_{k+1} \cdots a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} i = n! = 1\cdot 2 \cdots n$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

π.χ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(3!)} = \frac{1\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot \cancel{2}(1\cdot 2\cdot 3)} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$

$$= \frac{1\,\cancel{2}\,k(k+1)\cdots n}{\cancel{k!}(n-k)!}$$

$$= \frac{(k+1)\cdots n}{(n-k)!} \quad ?$$

Ισχύει ότι $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{n}{k} = \frac{(k+1)\cdots n}{(n-k)!} \quad (+) \rightarrow$$

$$\binom{n-k}{k} = \frac{(k+1)\cdots(n-1)}{(n-1-k)!}\frac{(n-k)}{(n-k)}$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k\cdots(n-1)}{(n-k)!} = \frac{k\cdots(n-1)}{(n-1-k)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(k+1)\cdots(n-1)(n-k+k)}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{(k+1)\cdots n}{(n-k)!} = (+)$$

Ταυτότητες: $(a+\beta^2) = a^2 + 2a\beta + \beta^2$

$(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\cdot\beta + 3a\cdot\beta^2 + \beta^2$

$$(a+\beta)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^i \beta^{n-i} \longrightarrow (a+\beta)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i} a^i \beta^{n+1-i}$$

$$(a+\beta)^n(a+\beta) = \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^i \beta^{n-i}\right)(a+\beta) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{i+1}\beta^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^i \beta^{n-i+1} = (++)$$

(*) → πίσω

$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{0}=1$ $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,\underbrace{(n-(n-k))!}_{k}}$

$i=n: \binom{n}{n}^{1} a^{n+1}$

$*$ $i=0$ $\binom{n}{0} \beta^{n+1}$

$(++)$ $= a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} \beta^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{i} \beta^{n-i+1} + \beta^{n+1}$

$\boxed{\begin{array}{l} i=0 \to j=1 \\ j=i+1 \end{array}}$ $\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{j} \beta^{n-j+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{j} \beta^{n+1-j} =$

$= \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right) a^{j} \beta^{n+1-j} = (+++)$

$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ $(+++)$ $= \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^{j} \beta^{n+1-j}$ $(++++)$

Απο $(++)$ και $(+++)$ έχουμε

$(a+\beta)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^{j} \beta^{n+1-j} + \beta^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{j} \beta^{n+1-j}$

Π.Χ $(a+\beta^{5}) = \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} a^{i} \beta^{5-i} = \underset{i=0}{\binom{5}{0} a^{5}} + \underset{i=1}{\binom{5}{1} a^{4}\cdot\beta} + \underset{i=2}{\binom{5}{2} a^{3}\cdot\beta^{2}} + \underset{i=3}{\binom{5}{3} a^{2}\cdot\beta^{3}} + \binom{5}{4} a\beta^{4} + \binom{5}{5}^{1} \beta^{5}$

$\binom{5}{1} = \frac{5!}{\cancel{1!}\,4!} = 5$

$\Rightarrow (a-\beta)^{n} = (a+(-\beta))^{n} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a^{i} \beta^{n-i}$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2}\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3}} = 10.$

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i} (-\beta)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i} (-1)^{n-i} \beta^{n-i} =$

(2)

Θεωρία Αρ

(11/10/2016.)

$(a+\beta)^n$

$(a-\beta)^n$

$a^2-\beta^2=(a-\beta)(a+\beta)$

$a^2+\beta^2=$

$a^3-\beta^3=(a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)$

$a^3+\beta^3=(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2$

502 $\rightarrow (a^n-\beta^n)=(a-\beta)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}\beta^i\right)=\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i}\beta^i-\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}\beta^{i+1}=$

$i=0: a^n$ $\qquad$ $i=0: -a^0\cdot\beta^n=-\beta^n$

$$=a^n+\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\beta^i-\sum_{i=0}^{n-2} a^{n-1-i}\beta^{i+1}-\beta^n$$

$i=j \rightarrow$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a^{n-j}\beta^j=\sum_{j=1}^{n-1} a^{\cancel{n-1-(j-1)}}\beta^j$

$i=0\to j=1$

$j=i+1$

$$a^n+\beta^n=a^n-(-\beta^n)=(a-(-\beta))\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}(-1)^i\beta^i\right)=(a+\beta)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a^{n-1-i}\beta^i\right)$$

<u>n περιττός</u>

Άσκηση 4: Αν δυο αριθμοί δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, θα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό διαιρέτη πρώτο.

Ένας φυσικός >1 καλείται πρώτος, αν διαιρείται μόνο από το ± 1 ή $\pm p$.

<u>π.χ</u> 2, 3, 5, 7, 13, 23, ...

$82=2\cdot 41$

82	2
41	~~2~~ ~~3~~ ~~5~~ ~~7~~ ~~11~~ ~~13~~ ~~17~~ ~~19~~ ~~23~~ ~~29~~ 41 πρώτος

π.χ

102	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Ορισμός: Δυο φυσικοί $\alpha, \beta > 1$ καλούνται πρώτοι μεταξύ τους ή πρώτοι προς αλλήλους, αν οι μοναδικοί κοινοί διαιρέτες είναι το ± 1.

Ορισμός: 1) Ένας φυσικός >1 καλείται σύνθετος, αν είναι γινόμενο άλλων μικρότερων φυσικών.

$\underset{\text{σύνθετος}}{n = \alpha \cdot \beta}$ $\quad \alpha, \beta < n$.

2) Ο φυσικός n διαιρείται από το d, αν $n = dd'$ με $|d'| > 1$
ή ο n είναι πολλ/σιο του d, αν $n = dd'$ με $|d'| > 1$

$d | n \iff n = dd', \ |d'| > 1 \iff \frac{n}{d} \in \mathbb{Z}$

διαιρεί

(Συνέχεια της άσκηση 4:)

$P(\alpha, \beta)$: $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ και $(\alpha, \beta) \neq 1$ ($\exists$ $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$ και $(\alpha, \beta) = d$).
δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους
Τότε $(\alpha, \beta) = 1$

$\Rightarrow q(\alpha, \beta)$: $\exists$ p πρώτος ώστε $p | \alpha$ και $p | \beta$.

$p(\alpha, \beta) \Rightarrow q(\alpha, \beta) \iff \neg q(\alpha, \beta) \Rightarrow \neg p(\alpha, \beta)$

Δεν υπάρχει πρώτος ώστε $p | \alpha$ και $p | \beta$.

Αλλά $1 | \alpha$ και β.

Θα μπορούσε να υπάρχει $n > 1$, n όχι πρώτος ώστε $n | \alpha$ και β

$n | \alpha \iff \alpha = nn'$ $\quad \beta = nn'$

n όχι πρώτος $\Rightarrow$ n σύνθετος. Άρα το n διαιρείται από κάποιο πρώτο p. $p | n \Rightarrow n = pp'$ $\quad \alpha = pp'n'$ και $\beta = pp'n'$

Άρα $p | \alpha$ και β αδύνατο.